Zur Rolle lokalisierter Zustände der Bethe-Goldstone-Gleichung

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 14 a, 1—5 [1959]; eingegangen am 14. September 1958)

As recently pointed out by GOTTFRIED localized solutions of the BETHE–GOLDSTONE equation can possibly affect the consistency of the BRUECKNER treatment of the many body problem. In the present paper the same problem is taken up from a different point of view by indicating the place where an inconsistency occurs in the lowest order or in higher orders of the GOLDSTONE analysis. Localized states of pairs of particles "in nuclear matter" seem just as dangereous as those of more particles.

1. Gewöhnliche und hermitesche Bethe–Goldstone-Gleichung

Durch die auf BRUECKNER [1] zurückgehenden Methoden wird das Viel-Teilchen-Problem für FERMI-Teilchen auf Zweierbegegnungen zurückgeführt und so mit der BETHE–GOLDSTONE-Gleichung [2]

$$(h_0 + \mathcal{P}\, v - \eta)\ \psi = 0 \tag{1}$$

in Verbindung gebracht; hier bedeutet h_0 den wechselwirkungsfreien HAMILTON-Operator (kinetische Energie + impulsabhängiges Ein-Teilchen-Potential) für die beiden Teilchen, v die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung und $\mathcal{P}$ einen Projektionsoperator, der alle Zustände der freien Teilchen innerhalb der FERMI-Kugel fortprojiziert; ψ ist eine Zwei-Teilchen-Wellenfunktion. GOTTFRIED [3] hat kürzlich die Möglichkeit diskutiert, daß im BRUECKNERschen Verfahren prinzipielle Schwierigkeiten auftreten können, wenn Gl. (1) außer Streuzuständen auch „lokalisierte" Zustände als Lösungen liefert. GOTTFRIEDS Überlegungen sollen hier in einer etwas anderen Form wiederholt werden [4].

Eine Schwierigkeit bei der mathematischen (und wohl auch physikalischen) Diskussion von Gl. (1) besteht darin, daß der dort auftretende Operator nicht hermitesch ist ($\mathcal{P}$ und v sind im allgemeinen nicht vertauschbar); es ist daher zweckmäßig, neben dieser Gleichung auch die folgende hermitesche zu untersuchen

$$(h_0 + \mathcal{P}\, v\, \mathcal{P} - \eta)\ \chi = 0\,. \tag{2}$$

Gl. (1) soll im folgenden als gewöhnliche BETHE–GOLDSTONE-Gleichung (gew. B.G.-Gl.) und Gl. (2) als hermitesche BETHE–GOLDSTONE-Gleichung (herm. B.G.-Gl.) bezeichnet werden. Wir untersuchen zunächst die herm. B.G.-Gl., die sich nur durch das impulsabhängige Ein-Teilchen-Potential und durch das nichtlokale Wechselwirkungspotential $\mathcal{P}\, v\, \mathcal{P}$ von der üblichen SCHRÖDINGER-Gleichung unterscheidet. Da der Operator hermitesch ist, sind die Eigenwerte reell. Die Gleichung besitzt für „vernünftige" Potentiale $\mathcal{P}\, v\, \mathcal{P}$ zwei verschiedene Typen von Eigenlösungen: Bei gegebenem Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$ der beiden Teilchen treten Streuzustände auf für alle Energien oberhalb der Minimalenergie für zwei freie Teilchen mit demselben Gesamtimpuls (abgekürzt M.E.; jedes Teilchen hat dabei den halben Gesamtimpuls); diese Streuzustände sind nicht normierbar, wenigstens solange nicht ein Normierungsvolumen eingeführt wird. Außerdem können „lokalisierte", d. h. nach Abspaltung der Schwerpunktbewegung normierbare, Eigenlösungen vorkommen.

Da der Projektionsoperator $\mathcal{P}$ mit dem HAMILTON-Operator der herm. B.G.-Gl. (2) vertauschbar ist, können die Eigenzustände eingeteilt werden in solche, für die

$$\mathcal{P}\, \chi = \chi \tag{3}$$

(Klasse I), und solche, für die

$$\mathcal{P}\, \chi = 0 \tag{4}$$

[1] Siehe etwa die unter Nr. 1 bis 20 zitierten Arbeiten in K. A. BRUECKNER, J. L. GAMMEL u. H. WEITZNER, Phys. Rev. **110**, 431 [1958], ferner die in der vorliegenden Arbeit in Anm. [8, 11] genannten Untersuchungen.

[2] H. A. BETHE u. J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **238**, 551 [1957].

[3] K. GOTTFRIED, An Inconsistency in the Perturbation Theory of the Real Fermi Gas (Vorabdruck); ferner unveröffentlichte Untersuchungen von J. GOLDSTONE. Vgl. auch L. N. COOPER, Phys. Rev. **104**, 1189 [1956].

[4] Einige Resultate dieser Arbeit wurden im Herbst 1957 gewonnen; nach der Lektüre von GOTTFRIEDS Arbeit wurden die Untersuchungen wieder aufgenommen und fortgeführt.

(Klasse II) gilt. Für Klasse II vereinfacht sich die herm. B.G.-Gl. zur wechselwirkungsfreien Gleichung

$$(h_0 - \eta)\, \chi = 0\,. \tag{5}$$

Die Einteilung der Streuzustände in die beiden Klassen ergibt sich unmittelbar aus dem asymptotischen Verhalten: In Klasse I fallen alle Streuzustände, deren asymptotischer Teil außerhalb der Fermi-Kugel beider Teilchen liegt; die Energie η muß dann größer als eine Minimalenergie sein, die als Zwei-Teilchen-Fermi-Energie (abgekürzt Z.T.F.; für hinreichend kleine Impulse $\boldsymbol{P}$ ist dies einfach die doppelte Ein-Teilchen-Fermi-Energie) zum Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$ bezeichnet werden soll. In Klasse II liegen die übrigen Streuzustände mit η kleiner als Z.T.F. und größer als M.E.; in Wahrheit liegt daher keine Streuung vor. Etwaige lokalisierte Zustände fallen stets in Klasse I, da die wechselwirkungsfreie Gl. (5) keine derartigen Zustände liefern kann.

Hieraus ergibt sich eine sehr merkwürdige Folgerung: Während bei gewöhnlichen Potentialen v die Bindungsenergie eines lokalisierten (= gebundenen) Zustandes stets positiv ist (bei üblicher Vorzeichendefinition), können die lokalisierten Eigenzustände der herm. B.G.-Gl. mit dem projizierten Potential $\mathcal{P}\, v\, \mathcal{P}$ jede Gesamtenergie η unterhalb der Z.T.F. besitzen; denn erst dort beginnen die Streuzustände der Klasse I. Die Bindungsenergie eines derartigen lokalisierten Zustandes (M.E. $-\,\eta$) kann daher sowohl negativ (Fall a) [5] wie positiv (Fall b) sein. Daß Fall a mit der physikalischen Anschauung schwer verträglich ist, hängt offenbar mit der Unanschaulichkeit des projizierten Potentials zusammen. Außerdem besteht die Möglichkeit von Resonanzen in den Streuzuständen (Fall c); dieser Fall soll hier jedoch nicht untersucht werden, weil er im Gegensatz zu den Fällen a und b nicht für anziehende Potentiale besonders charakteristisch zu sein scheint. Das Spektrum der herm. B.G.-Gl. ist in der linken Hälfte von Abb. 1 eingezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen der herm. und der gew. B.G.-Gl. ist sehr einfach für Klasse I (Streuzustände, bei denen beide Teilchen asymptotisch außerhalb der Fermi-Kugel liegen, sowie etwaige lokalisierte Zustände): diese Zustände sind gleich-

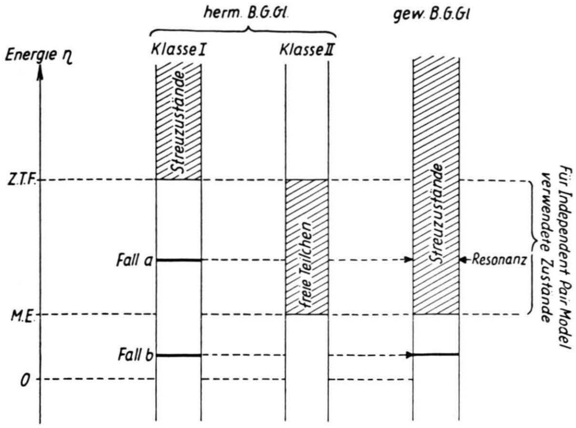

Abb. 1. Spektrum der herm. B.G.-Gl. (mit den Klassen I und II) und daraus hervorgehendes der gew. B.G.-Gl. für festen Gesamtimpuls P. Zusatz b. d. Korr.: Im Falle a bewirkt der lokalisierte Zustand der herm. B.G.-Gl. nicht nur eine Resonanz in den Streuzuständen der gew. B.G.-Gl.; er tritt außerdem selbst als lokalisierte Lösung der gew. B.G.-Gl. auf.

zeitig Lösungen der herm. und der gew. B.G.-Gl. Die hiermit nicht erfaßten Lösungen beider Gleichungen gewinnt man, indem man die gew. B.G.-Gl. von links einmal mit $(1-\mathcal{P})$ und einmal mit $\mathcal{P}$ multipliziert:

$$\begin{aligned} &(h_0 - \eta)\,(1-\mathcal{P})\,\psi = 0\,,\\ &(h_0 + \mathcal{P}\, v\, \mathcal{P} - \eta)\,\mathcal{P}\,\psi = -\mathcal{P}\, v\,(1-\mathcal{P})\,\psi\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Also ist $(1-\mathcal{P})\,\psi = \varphi$ Lösung der zugehörigen (wechselwirkungsfreien) herm. B.G.-Gl.; die Lösung der gew. B.G.-Gl. ergibt sich damit zu

$$\psi = \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{h_0 + \mathcal{P}\, v\, \mathcal{P} - \eta}\, v\right)\varphi\,. \tag{7}$$

In Fall a, wenn ein lokalisierter Zustand von Klasse I in das kontinuierliche Spektrum von Klasse II fällt, ergeben sich schon an dieser Stelle Unendlichkeiten (Resonanzen); hierauf kommen wir in Abschn. 2 zurück. Das Spektrum der gew. B.G.-Gl. ist in der rechten Hälfte von Abb. 1 eingezeichnet.

Jeder Eigenlösung der herm. B.G.-Gl. ist somit eine solche der gew. B.G.-Gl. zugeordnet worden. Mittels Gl. (6) erkennt man, daß die gew. B.G.-Gl. nicht noch weitere Eigenlösungen besitzt: Entweder ist $\mathcal{P}\,\psi = \psi$, dann gehorcht ψ auch der herm. B.G.-Gl. und gehört zu Klasse I. Oder $\mathcal{P}\,\psi$ ist von ψ verschieden; die Funktion $(1-\mathcal{P})\,\psi$

[5] Auf diesen Fall wurde Verf. nach Fertigstellung einer vorläufigen Fassung des Manuskripts durch Herrn Brenig hingewiesen, der ihn seinerseits in der Sommerschule in Les Houches von Herrn V. Emery erfahren hatte. Bereits Gottfried zeigt, daß für anziehendes separierbares Potential stets genau ein lokalisierter Zustand auftritt, der je nach der Stärke des Potentials unter Fall a (schwaches Potential) oder unter Fall b (starkes Potential fällt; allerdings wird aus der Gottfriedschen Arbeit nicht deutlich, ob dem Verf. die Möglichkeit des Falles a klar war.

gehorcht dann der wechselwirkungsfreien Gl. (5); wegen $\mathcal{P}(1-\mathcal{P})\,\psi=0$ gehört $(1-\mathcal{P})\,\psi$ zu Klasse II.

Wegen des Auftretens der B.G.-Gl. im Zusammenhang mit dem Problem eines stationären Zustandes ist das asymptotische Verhalten der Streuzustände durch das Auftreten eines Hauptwertes in der zugeordneten Integralgleichung festgelegt: Nach Abspaltung der Schwerpunktbewegung (und unter Fortlassung der Spinindizes) hat man

$$\psi(\boldsymbol{r}) \text{ bzw. } \chi(\boldsymbol{r}) \simeq \exp(i\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\,r}\,[f_+(\boldsymbol{r}_0)\exp(i\,k\,r) + f_-(\boldsymbol{r}_0)\exp(-i\,k\,r)] \tag{8}$$

($\boldsymbol{r}_0$ = Einheitsvektor in der r-Richtung) mit

$$f_+(-\boldsymbol{r}_0) = f_-(\boldsymbol{r}_0). \tag{9}$$

Diese detaillierte Festlegung des asymptotischen Verhaltens ist jedoch nur für Streuzustände der Klasse I wesentlich; bei den übrigen Streuzuständen verschwinden f_+ und f_-.

2. Zwei-Teilchen-*t*-Matrix

Die Zwei-Teilchen-t-Matrix ist als (Matrix oder) Operator im Raum der Zwei-Teilchen-Wellenfunktionen durch die Integralgleichung

$$t(e) = v - v\,\frac{\mathcal{P}}{h_0+e}\,t(e) \tag{10}$$

definiert. Hierbei ist e die wechselwirkungsfreie Energie der im Sinne der GOLDSTONEschen[6] Graphen „gleichzeitig" vorhandenen Teilchen (gleichläufige Linien) und Löcher (gegenläufige Linien); die Energie der Löcher wird negativ gezählt. Bekanntlich erhält man die gew. B.G.-Gl., indem man

$$t(e)\,\varphi = v\,\psi \tag{11}$$

setzt, wobei φ ein wechselwirkungsfreier Zustand zweier Teilchen innerhalb der FERMI-Kugel mit der Energie $\eta=-e$ ist. Grundlegend für die folgenden Diskussionen ist die Beziehung

$$\frac{\mathcal{P}}{h_0+e}\,t(e) = \frac{\mathcal{P}}{h_0+\mathcal{P}\,v\,\mathcal{P}+e}\,v, \tag{12}$$

die jetzt abgeleitet werden soll. Wegen des Auftretens der Größen in einem stationären Problem (und nicht in einem Streuproblem) sind alle Quotienten im Sinne eines Hauptwertes gemeint.

Zunächst werde Gl. (10) von links mit dem Projektionsoperator $\mathcal{P}$ multipliziert

$$\mathcal{P}\,t(e) = \mathcal{P}\,v - \mathcal{P}\,v\,\mathcal{P}\,\frac{\mathcal{P}}{h_0+e}\,t(e)\,. \tag{13}$$

Die linke Seite werde nunmehr mit

$$(h_0+e)\,\frac{1}{h_0+e} = 1 \tag{14}$$

von links multipliziert; durch Umordnen der Glieder folgt

$$(h_0+\mathcal{P}\,v\,\mathcal{P}+e)\,\frac{\mathcal{P}}{h_0+e}\,t(e) = \mathcal{P}\,v, \tag{15}$$

woraus sich sofort Gl. (12) ergibt.

Gl. (10) kann nun vermöge Gl. (12) sofort gelöst werden[7]

$$t(e) = v - v\,\frac{\mathcal{P}}{h_0+\mathcal{P}\,v\,\mathcal{P}+e}\,v; \tag{16}$$

vgl. auch Gln. (11) und (7). Nunmehr liegt es nahe, die Lösungen χ der herm. B.G.-Gl. als Zwischenzustände einzuführen

$$t(e) = v - \int \mathrm{d}\boldsymbol{P} \left\{ \sum_{\text{geb. Zust.}} v\,|\chi_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}}\rangle\,\frac{1}{\eta_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}}+e}\,\langle\chi_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}}|\,v + \int_{\substack{\text{Streuzust.}\\ \text{Kl. I}}} \mathrm{d}\eta\; v\,|\chi_{\boldsymbol{P}\eta}\rangle\,\frac{1}{\eta+e}\,\langle\chi_{\boldsymbol{P}\eta}|\,v \right\}. \tag{17}$$

Wegen des Projektionsoperators $\mathcal{P}$ treten dabei nur Lösungen der Klasse I (also etwaige lokalisierte Zustände und Streuzustände außerhalb der FERMI-Kugel) auf; $\boldsymbol{P}$ bedeutet den Gesamtimpuls des Paares, $\chi_{\boldsymbol{P}_\mathrm{i}}$ bzw. $\eta_{\boldsymbol{P}_\mathrm{i}}$ sind die Wellenfunktionen bzw. Energien gebundener Zustände, $\chi_{\boldsymbol{P}_\eta}$ die Wellenfunktionen von Streuzuständen. Schwierigkeiten können auftreten, wenn ein Nenner $\eta_{\boldsymbol{P}_\mathrm{i}}+e$ nahezu verschwindet, d. h. wenn die Energie $\eta_{\boldsymbol{P}_\mathrm{i}}$ eines lokalisierten Paares durch die Energie gleichzeitig vorhandener Teilchen und Löcher nahezu kompensiert wird.

Im Falle a erscheint diese Schwierigkeit bereits in niedrigster Näherung, da die Kompensation bereits durch die beiden dann allein vorhandenen Löcher geschehen kann. Also bereits die niedrigste Näherung des BRUECKNERschen Verfahrens (auch *Independent Pair Model*[8] genannt) verliert dann ihren Sinn; entsprechende Unendlichkeiten (Reso-

[6] J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **293**, 267 [1957]. Verf. dankt Herrn Prof. H. A. BETHE für mündliche Erläuterungen zu dieser Arbeit.

[7] Als Nebenergebnis folgt hieraus, daß die t-Matrix $t(e)$ *für festes e* hermitesch ist.

[8] L. C. GOMEZ, J. D. WALECKA u. V. F. WEISSKOPF, Ann. Physics **3**, 241 [1958].

nanzen) zeigen sich natürlich auch schon in den Lösungen (7) der gew. B.G.-Gl.

Im Falle b ergeben sich Schwierigkeiten erst in höheren Näherungen im Sinne von GOLDSTONE, wenn mehr als zwei Löcher und außerdem Teilchen gleichzeitig mit dem Paar auftreten[9] (Abb. 2 a). Daß dadurch möglicherweise die ganze Störungsrechnung zusammenbricht, erkennt man bei Berechnung des Beitrages eines solchen Graphen zur Wellenfunktion des Viel-Teilchen-Problems. Die Wellenfunktion des betrachteten Paares in Gegenwart der gleichzeitig vorhandenen Teilchen und Löcher ergibt sich nämlich durch Anwendung des Operators Gl. (12) auf eine geeignete Wellenfunktion. Durch explizites Einsetzen von Zwischenzuständen erhält man

$$\frac{P}{h_0+e}\, t(e) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{P} \left\{ \sum_{\text{geb. Zust.}} \frac{1}{\eta_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}}+e} \cdot \chi_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}} \langle \chi_{\boldsymbol{P}\mathrm{i}} | \, v + \int\limits_{\substack{\text{Streuzust.}\\ \text{Kl. I}}} \cdots\cdots \right\}. \tag{18}$$

Wenn die Energie der gleichzeitig vorhandenen Teilchen und Löcher die Energie eines gebundenen Zustandes nahezu kompensiert, wird die betreffende Wellenfunktion beliebig groß im Gegensatz zu den Voraussetzungen der Störungsrechnung.

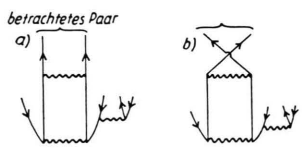

Abb. 2. a) Typischer GOLDSTONEscher Graph, bei dem ein lokalisiertes Paar auftreten kann. b) Zugehöriger überkreuzter Graph.

Vielleicht sollte noch angemerkt werden, daß nur solche Lösungen der herm. B.G.-Gl. von Bedeutung sind, die dem PAULI-Prinzip gehorchen. Das ist physikalisch einleuchtend und folgt formal daraus, daß neben jedem Graphen (Abb. 2 a) auch der überkreuzte Graph (Abb. 2 b) auftritt.

3. Diskussion

Während GOTTFRIED seine Diskussion physikalisch auf das *Independent Pair Model* basiert, verwenden wir hier die GOLDSTONEsche Störungsrechnung, die die Annäherung an die strenge Lösung wenigstens im Prinzip zu übersehen erlaubt. Bei dieser Störungsrechnung geht man von unabhängigen Teilchen in einem mittleren Potential aus und behandelt die Zweierbegegnungen streng, indem man die wirkliche Wechselwirkung v durch die effektive Wechselwirkung $t(e)$ ersetzt; die niedrigste Näherung stimmt formal mit dem *Independent Pair Model* überein. Wir glauben gezeigt zu haben, daß in Fall a bereits das *Independent Pair Model* nicht existiert und daß in Fall b die höheren Näherungen der GOLDSTONEschen Störungsrechnung gefährdet werden; diese Gefährdung bedeutet offenbar, daß die gewählte nullte Näherung als solche nicht geeignet ist. Eine kritische Situation tritt stets auf, wenn die Energie eines lokalisierten Paares (oder wohl auch mehrerer solcher Paare) durch diejenige der gleichzeitig vorhandenen Teilchen und Löcher nahezu kompensiert wird. Anschaulich gesprochen bleiben dann die beiden Partner des Paares sehr lange beieinander; die Amplitude der entsprechenden Wellenfunktion wird sehr groß.

Im Gegensatz zu GOTTFRIED glauben wir jedoch nicht, daß nur die lokalisierten Zustände von Paaren („Quasi-Deuteronen") eine Rolle bei der Beurteilung des BRUECKNERschen Verfahrens für anziehende Wechselwirkungen (Kernmaterie) spielen. Ebenso gefährlich scheint uns die vorübergehende Bildung von größeren lokalisierten Komplexen, etwa von „Quasi-Alphateilchen" oder auch von viel größeren Gebilden zu sein. (Man kann solche Gebilde formal erhalten durch Aufsummieren geeigneter GOLDSTONEscher Graphen.) Diese Beobachtung dürfte ein weiterer Hinweis darauf sein, daß die Behandlung des Viel-Teilchen-Problems mit anziehender Wechselwirkung viel stärkeren Einwänden ausgesetzt ist als diejenige mit abstoßender Wechselwirkung[10]. Es scheint darauf anzukommen, das BRUECKNERsche Verfahren in einer solchen Weise zu modifizieren, daß die mögliche Bildung lokalisierter Komplexe in Kernmaterie bereits an einer frühen Stelle berücksichtigt wird.

Diese Auffassung steht im Gegensatz zu den Ergebnissen einer Arbeit von DE SHALIT und WEISSKOPF[11]. Dort wird aus den Lösungen der gew. B.G.-

[9] In der niedrigsten (meist allein berücksichtigten) Näherung tritt diese Kompensation nicht ein, solange für die Impulsabhängigkeit des Ein-Teilchen-Potentials eine bestimmte Konvexitätsbedingung erfüllt ist.

[10] Solche Einwände (WIGNER, LEE, YANG) lernte Verf. kennen bei dem Symposium über Viel-Teilchen-Probleme in Hoboken, N. J., U.S.A., im Januar 1957.

[11] A. DE SHALIT u. V.F. WEISSKOPF, The Wave Function of Nuclear Matter; Vorabdruck.

Gl. eine Wellenfunktion für das Viel-Teilchen-Problem im Sinne einer expliziten Präzisierung des *Independent Pair Model* zusammengesetzt; diese Wellenfunktion stimmt im wesentlichen mit derjenigen überein, die sich in der BRUECKNERschen Näherung ergibt. In Fall a scheint uns allerdings bereits die Konstruktion dieser Wellenfunktion nicht möglich zu sein. Die Verfasser versuchen zu zeigen, daß diese Wellenfunktion eine gute Annäherung an die richtige Wellenfunktion darstellt und vertreten die Ansicht, daß die lokalisierten Zustände der B.G.-Gl. sich auf den „Normalzustand" von Kernmaterie nicht auswirken, sondern nur auf einen etwaigen „supraleitenden" Zustand [12]. Nun beziehen sich aber unsere Überlegungen gerade auf den „Normalzustand", wie er sich bei konsequenter Fortentwicklung des BRUECKNERschen Verfahrens im Sinne von GOLDSTONE ergibt; die erforderlich scheinenden Modifikationen des Verfahrens könnten allerdings auf einen „supraleitenden" Zustand führen. Auch scheinen uns die Überlegungen von DE SHALIT und WEISSKOPF nicht zwingend zu sein.

Man betrachte hierzu etwa folgendes stark vereinfachte Anwendungsbeispiel der Schlußweise von DE SHALIT und WEISSKOPF: Ein HAMILTON-Operator sei aufgespalten in der Form $H = H^0 + H'$; Ψ_j seien Eigenfunktionen von H^0; dabei seien Ψ_1 und Ψ_2 energetisch entartet (Energie E_1). Jetzt sei fälschlich angenommen, daß Ψ_1 eine gute Annäherung an die richtige Lösung darstelle. Mit den Verfassern bildet man dann

$$(H-E)\,\Psi_1 = [E_1 + (\Psi_1, H'\,\Psi_1) - E]\,\Psi_1 + \sum_{j \neq 1} (\Psi_j, H'\,\Psi_1)\,\Psi_j \equiv W \tag{19}$$

und gibt sich damit zufrieden, daß W unter Umständen klein ist. Die richtige nullte Näherung ergibt sich jedoch unabhängig von der Größe von H' aus einem Säkularproblem als Linearkombination von Ψ_1 und Ψ_2.

Ein vertieftes Verständnis des quantenmechanischen Viel-Teilchen-Problems und der Rolle der BETHE–GOLDSTONE-Gleichung habe ich während eines Aufenthalts am Massachusetts Institute of Technology im akademischen Jahr 1956/57 in der Gruppe von Herrn Prof. WEISSKOPF gewonnen. Ich möchte Herrn Prof. WEISSKOPF auch an dieser Stelle für fördernde Diskussionen über den Problemkreis danken. Herrn Dr. BRENIG danke ich für die kritische Durchsicht früherer Fassungen der Arbeit, für Diskussionen und für die Mitteilung von Ergebnissen aus der Sommerschule in Les Houches. Herr Dr. EMERY hat mir freundlicherweise mitgeteilt, wie sich ihm die historische Entwicklung des Problems darstellt.

12 A. BOHR, B. R. MOTTELSON u. D. PINES, Phys. Rev. **110**, 936 [1958].

Zum Teilchen-Loch-Übergang in Systemen nahezu unabhängiger Fermi-Teilchen

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **14 a**, 5—7 [1959]; eingegangen am 14. September 1958)

The particle-hole relation in systems of nearly independent Fermions becomes more natural and transparent if it is chosen as an anti-linear relation.

Die von HEISENBERG [1] aufgedeckte Beziehung zwischen Löcher- und Teilchenzuständen in Systemen nahezu unabhängiger FERMI-Teilchen gewinnt an Allgemeingültigkeit und Durchsichtigkeit, wenn der Zusammenhang zwischen einer Teilchenfunktion Ψ und der zugehörigen Löcherfunktion Φ antilinear gewählt wird.

Eine „Schale" [2] nahezu wechselwirkungsfreier FERMI-Teilchen sei dadurch definiert, daß sie, bei Vernachlässigung der Wechselwirkung der Teilchen untereinander, mit einem Ein-Teilchen-Zustand auch alle damit genau oder nahezu entarteten Ein-Teilchen-Zustände enthält. Die Zahl der Teilchen in der abgeschlossenen Schale heiße n_s; man kann dabei

1 W. HEISENBERG, Ann. Phys., Lpz. (V) **10**, 888 [1931]. Spätere Arbeiten u. a.: E. U. CONDON u. G. H. SHORTLEY, The Theory of Atomic Spectra, University Press, Cambridge 1935, Kap. XIII; F. HUND, Z. Phys. **105**, 202 [1937]; G. RACAH, Phys. Rev. **62**, 438 [1942]; D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953]; D. BRINK u. G. SATCHLER, Nuovo Cim. **4**, 549 [1956]; V. G. NEUDACHIN, J. Exp. Theor. Phys. UdSSR **33**, 918 [1957], engl. Übers. Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. USSR **6**, 706 [1958].

2 Wir verwenden die Terminologie der Atom- und Kernphysik; in der Physik der Metallelektronen spricht man von einem „Band".